Blatt 2

Abgabe am 27. September

Zum Wiederholen ...

Aufgabe 5. (A, 2 Punkte)
In einer Schublade befinden sich 6 rote und 8 blaue Socken. Wenn in der Dunkelheit (also zufällig) zwei Socken aus der Schublade gezogen werden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit (a) zwei rote (b) zwei blaue (c) zwei verschiedene (d) zwei zueinander passende Socken zu ziehen?

Aufgabe 6. (A, 2 Punkte)
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 90 Studierenden (mindestens) zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Aufgabe 7. (A, 2 Punkte)
Ein Multiple-Choice Test besteht aus 4 Fragen, bei jeder stehen drei Antworten zur Auswahl. Nur eine davon ist jeweils richtig. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Raten (a) alle vier Fragen (b) nur eine Frage richtig zu beantworten?

Und jetzt etwas Neues ...

Aufgabe 8. Ereignisse als Mengen (A, 7 Punkte)

(a) Drücke die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise mit Hilfe der Ereignisse A, B und C aus:

D_1 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.“
D_2 = „Höchstens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.“
D_3 = „Weder A noch B noch C tritt ein.“
D_4 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt nicht ein.“
D_5 = „Genau eines der drei Ereignisse A, B oder C tritt ein.“

(b) Drücke die folgenden Verhältnisse zwischen Ereignissen in Mengenschreibweise aus:

„A kann nur dann eintreten, wenn weder B noch C eintritt.“
„Falls A nicht eintritt, tritt B auch nicht ein.“

Aufgabe 9. (A, 6 Punkte)
Man wirft drei (faire) Würfel.

(a) Gib einen sinnvollen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an mit dem man dieses Zufallsexperiment modellieren kann.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man wenigstens eine 6 würfelt.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man wenigstens zwei gleiche Augenzahlen erhält.

Aufgabe 10. (B, 5 Punkte)
Es wird eine gefälschte Münze solange geworfen, bis zum ersten Mal 'Kopf' fällt. Gefälscht bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit p, bei einem Wurf 'Kopf' zu erhalten, nicht notwendigerweise gleich 0.5 ist; es gelte jedoch $0 < p < 1$.

(a) Konstruiere einen geeigneten (abzählbaren) Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment (nach endlicher Zeit) beendet wird?

(c) N bezeichne die Anzahl der Würfe 'Zahl', bis zum ersten Mal 'Kopf' geworfen wird. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen N.

(d) Drücke das Ereignis $B = \{\textit{mindestens einmal wird Zahl geworfen}\}$ durch die Zufallsvariable N aus, und berechne die Wahrscheinlichkeit von B.

Aufgabe 11. Subadditivität des W-Masses (A–B, 5 Punkte)
Nehme an, dass wie in der Vorlesung $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und Ω höchstens abzählbar sind.

(a) Mit Hilfe der Aussagen aus der Vorlesung zeige, dass $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

(b) Seien $A_1, A_2, \ldots$ beliebige Ereignisse. Zeige, dass

$$P\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i).$$