Blatt 3

Abgabe am 4. Oktober

Eine vollständige Argumentation bei jeder Aufgabe ist essenziell um die volle Punktzahl zu erreichen.

Aufgabe 12. Laplace Modelle I (A, 3 Punkte)
Ein Kunde bezieht von einem Lieferanten Bauteile in Lieferungen zu je 1000 Einheiten. Bevor er eine Lieferung annimmt, macht er eine Stichprobenprüfung im Umfang von 100 Einheiten. Er nimmt die Lieferung an, wenn er in der Stichprobe höchstens 3 fehlerhafte Stücke findet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine Annahme, wenn in der Lieferung
(a) 10 (b) 20 (c) 100 Einheiten fehlerhaft sind?
(*Vergesse nicht ein vollständiges Wahrscheinlichkeits-Modell für diesen Vorgang zu beschreiben*)

Aufgabe 13. Laplace Modelle II (A, 3 Punkte)
Sechs von 0 bis 5 nummerierte Karten werden gemischt und, Zahl nach oben, in eine Reihe gelegt. Ein Zug besteht darin, von links her so viele Karten wegzunehmen, wie die erste Karte anzeigt.

Beispiel: $[2][0][4][3][5][1] \longmapsto [4][3][5][1]$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei Züge vollständig durchführen kann?

Aufgabe 14. (A, 3 Punkte)
Eine Fluggesellschaft weiss aus empirischen Untersuchungen, dass im Durchschnitt 10% der gebuchten Sitzplätze storniert werden. Daher verkauft sie für eine Maschine mit 100 Sitzplätzen von vornherein 5% zuviele Flugtickets. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine überbucht ist?

Aufgabe 15. Prinzip der Inklusion-Exklusion ((a)A,(b)B–C, 5 Punkte)
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass für zwei beliebige Ereignisse A, B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Wir verallgemeinern jetzt diese Aussage.

(a) Zeige für beliebige Ereignisse A, B, C, dass

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten jetzt beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $n \geq 1$. Zeige, dass

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Hinweis: Schreibe $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ als $A_n \cup (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ und benutze eine Induktion.

Aufgabe 16. Garderobenproblem (Montmart, 1708) (B, 6 Punkte)
n Mäntel werden zufällig auf n Personen verteilt. Finde die Wahrscheinlichkeit, dass keine Person ihren eigenen Mantel bekommt. Folge dazu den folgenden Anweisungen:

(a) Finde einen geeigneten W-Raum für diese Aufgabe.

(b) Drücke formell das Ereignis $A_i =$"i-te Person bekommt ihren eigenen Mantel" aus. Berechne die Wahrscheinlichkeit von A_i.

(c) Drücke formell das Ereignis die Personen $i_1, \ldots, i_k$ bekommen ihren eigenen Mantel aus (wobei $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$) und berechne dessen W-keit.

(d) Schreibe das Ereignis $B =$"keine Person bekommt ihren eigenen Mantel" mit Hilfe der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$.

(e) Nutze die Aufgabe 15 um $P(B)$ zu berechnen.

(f) Finde den Grenzwert von $P(B)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 17. Erwartungswerte (B, 4 Punkte)

(a) Sei X eine *binomial-verteilte* Zufallsvariable mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, das heisst

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Berechne EX.

(b) Sei X eine *hypergeometrisch-verteilte* Zufallsvariable mit Parametern N, K, $n \in \mathbb{N}$ ($K \leq N$, $n \leq N$), das heisst

$$P[X = k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{für } k = \max(0, n+k-N), \ldots, \min(n, K).$$

Berechne EX.