Blatt 4

Abgabe am 11. Oktober

Eine vollständige Argumentation bei jeder Aufgabe ist essenziell um die volle Punktzahl zu erreichen.

Aufgabe 18. (A, 4 Punkte)
Bitfolgen der Länge 3 werden über einen Nachrichtenkanal gesendet, der Störungen ausgesetzt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit falsch übertragen wird (d.h., dass eine gesendete Null als eine Eins ankommt oder umgekehrt), ist $p = 0.001$ („Bitfehlerwahrscheinlichkeit"). Man interessiert sich für $X =$ *Anzahl der Bitfehler in einer zufällig gesendeten Bitfolge der Länge* 3.

(a) Konstruiere einen geeigneten W-Raum für dieses Experiment.

(b) Gib den Wertebereich und die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) ein Bitfehler auftritt?

(d) Wie viele Fehler sind im Mittel pro gesendeter Bitfolge zu erwarten?

Aufgabe 19. Hypergeometrische und Binomial-Verteilungen (B, 3 Punkte)
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Anzahl der Erfolge (rote Kugeln) beim Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen binomial verteilt ist. Wenn man ohne Zurücklegen zieht, ist diese Anzahl hypergeometrisch verteilt. Intuitiv, wenn die Anzahl der Stichproben n viel kleiner als die Anzahl der Kugeln N in der Urne ist, dann sollte es kaum eine Rolle spielen, ob man mit oder ohne Zurücklegen zieht. Wir bestätigen jetzt diese Intuition:

Betrachte eine Urne mit N Kugeln, K davon sind rot. Seien X und Y die Anzahle der gezogenen roten Kugeln in n Versuchen, ohne bzw. mit Zurücklegen (d.h. X, Y sind grundsätzlich auf unterschiedlichen W-Räumen definiert). Wir setzen $n \in \mathbb{N}$ fest und lassen $N, K \to \infty$ streben, so dass die Proportion der roten Kugel etwa konstant bleibt, d.h. $\lim_{N\to\infty} K/N = p \in [0, 1]$. Zeige, dass in diesem Fall

$$\lim_{N,K\to\infty} P(Y = k) = \lim_{N,K\to\infty} P(X = k), \qquad \text{für alle } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Aufgabe 20. die einfache Irrfahrt ((a,b)B,(c)C, 5 Punkte)
Sei $(S_k)_{k=0,\dots,N}$ die einfache Irrfahrt wie in der Vorlesung definiert.

(a) Sei $k \le N$ eine gerade Zahl. Zeige, dass die Funktion $f_k(x) := P(S_k = x)$ ihr Maximum für $x = 0$ annimmt. *Hinweis:* Betrachte das Verhältnis von $\binom{n}{\ell}$ zu $\binom{n}{\ell+1}$.

(b) Sei jetzt k ungerade. Für welche Werte von x ist $f_k(x)$ maximal?

(c) Sei $T_a = \inf\{k \in \{1, \dots, N\} : S_k = a\}$ die erste Zeit bei der $a \in \mathbb{Z}$ erreicht wird (wir setzen $T_a = N + 1$, wenn a nicht in N Schritten erreicht wurde). Zeige, dass eine Konstante $C < \infty$ existiert, so dass

$$P(T_a \geq n) \leq C\frac{a}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle } a \neq 0,\ N \in \mathbb{N} \text{ und } n \leq N.$$

(Es folgt, dass, wenn $n, N \to \infty$ mit $N \geq n$, dann

$$\lim_{n,N\to\infty} P(T_a \geq n) = 0,$$

d.h. a wird irgendwann mit „grosser W-keit" erreicht.)

Hinweis: Benutze dazu das Verhalten von $P(S_k = 0)$ aus der Vorlesung und die Fragen (a), (b).

Aufgabe 21. Das Ballot-Problem (C, 3 Punkte)
Bei einem Wahlgang mit total $n \in \mathbb{N}$ Stimmen erhält der Sieger von zwei Kandidaten $k > 0$ Stimmen mehr als sein Gegner. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sieger während der ganzen Auszählung in Führung liegt, wenn die Stimmen in zufälliger Reihenfolge ausgezählt werden?

Hinweis: Betrachte dazu die Irrfahrt $(S_l)_{0\leq l\leq n}$ und zeige, dass es gleich viele Pfade von $(1, 1)$ nach (n, k) gibt, welche die Zeitachse schneiden oder berühren, wie Pfade von $(1, 1)$ nach $(n, -k)$.

Aufgabe 22. Bedingte Wahrscheinlichkeit (A, 4 Punkte)
Sie fliegen von München nach Los Angeles und steigen dabei in London und New York um. An jedem Flughafen, inklusive München, muss Ihr Koffer verladen werden. Dabei wird er mit Wahrscheinlichkeit p fehlgeleitet. In Los Angeles stellen Sie fest, dass Ihr Koffer nicht angekommen ist. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass er in München bzw. London bzw. New York fehlgeleitet wurde. (Wie immer: Zur vollständigen Lösung gehört die Angabe des Wahrscheinlichkeitsmodells.)

Aufgabe 23. Bedingte Wahrscheinlichkeit II (A, 4 Punkte)
Die Herstellung von Glühbirnen sei zufälligen Ereignissen unterworfen, sodass sich alle Glühbirnen in drei Qualitätsstufen unterteilen. Die einzelnen Qualitätsstufen unterscheiden sich dadurch, dass die Wahrscheinlichkeit für die Lebensdauer einer Glühbirne von mehr als 5000 Stunden gleich 0.8 für die höchste, 0.5 für die mittlere und 0.2 für die niedrigste Qualitätsstufe beträgt. Die Anteile der einzelnen Qualitätsstufen an der Gesamtproduktion verhalten sich – in dieser Reihenfolge – wie 17 : 2 : 1.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Lebensdauer einer zufällig herausgegriffenen Glühbirne kleiner als 5000 Stunden?

(b) Eine zufällig herausgegriffene Glühbirne hat weniger als 5000 Stunden funktioniert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie nicht die niedrigste Qualitätsstufe besass?