Blatt 5

Abgabe am 18. Oktober

Ab diesem Blatt werden die Aufgaben in Schwierigkeits-Kategorien A–C eingeteilt (Aufgaben der Kateogrie A sind am einfachsten, Aufgaben der Kategorie C am schwierigsten und Aufgaben der Kategorie B irgendwo dazwischen). Die Aufgaben der Kategorie A sollten für alle lösbar sein, die regelmässig die Vorlesung besuchen. Aufgaben der Kategorien A, B sollte man am Ende des Semester lösen können um die Klausur/Prüfung zu bestehen. Die Aufgaben der Kategorie C werden nicht bei der Klausur vorkommen. Sie sind nicht notwendigerweise schwierig, aber vielleicht ein bisschen unüblich.

Aufgabe 24. Bedingte W-keiten III (A, 4 Punkte)
Von 15 Karten sind 10 auf beiden Seiten rot, 3 auf beiden Seiten schwarz und 2 mit einer roten und einer schwarzen Seite. Die Karten werden in einem Hut gemischt, dann wird zufällig eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die untere Seite schwarz ist.

(b) Nehme jetzt an, dass die obere Seite rot ist. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die untere Seite schwarz ist.

Aufgabe 25. Multiplikationsregel (A, 3 Punkte)
Behauptung aus der Vorlesung: Seien $A_1, \dots, A_n$ beliebige Ereignisse, wobei $P(A_1 \cap \dots A_n) > 0$. Zeige, dass

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Hinweis: Es ist einfacher mit der rechten Seite der Gleichung anzufangen.

Aufgabe 26. HIV Test (B, 6 Punkte)
Ein Test gibt mit 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit bei einer mit HIV infizierten Person ein positives Testresultat. Mit 99.8%-iger Wahrscheinlichkeit gibt der Test bei einer nicht mit HIV infizierten Person ein negatives Testresultat. Man weiss ausserdem, dass insgesamt 0.05% der Menschen in der Schweiz infiziert sind.

(a) Wie viele von 1000 getesteten HIV-positiven Personen erhalten (im Duchschnitt) fälschlicherweise ein negatives Testresultat (*falsch negativ*)?

(b) Wie viele von 1000 getesteten nicht HIV-positiven Personen erhalten fälschlicherweise ein positives Testresultat (*falsch positiv*)?

(c) (Beispiel aus der Vorlesung, mit anderen Zahlenwerten) Eine zufällig ausgewählte Person (nicht aus einer Risikogruppe) lässt sich testen und der Test fällt positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie trotzdem nicht mit HIV infiziert ist?

(d) Um das Ergebnis des ersten Test zu überprüfen, wird ein zweiter Test durchgeführt, der "unabhängig" von dem ersten ist (d.h, z.B., bei einer nicht mit HIV infizierten Person sind beide Tests zusammen mit Wahrscheinlichkeit 0.998^2 negativ). Der zweite Test fällt wieder positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person nicht mit HIV infiziert ist?

Aufgabe 27. Unabhängigkeit von mehreren Ereignissen (B, 3 Punkte)
Finde ein Wahrscheinlichkeitsraum mit drei Ereignissen A, B, C, die nicht unabhängig sind, aber $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. *Hinweis:* Versuche es mit $|\Omega| = 8$ und einem Laplace-Modell.

Aufgabe 28. Unabhängigkeit (A, 5 Punkte)
Man würfelt mit zwei fairen Würfeln. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, bezeichnen die Augenzahlen auf dem ersten/zweiten Würfel, und $S = X_1 + X_2$. Welche der folgenden Kollektionen von Ereignissen sind unabhängig:

(a) "X_1 ist gerade" und "$X_2 \geq 5$".

(b) "X_1 ist gerade" und "$X_1 \geq 2$"

(c) "X_1 ist gerade" und "$X_1 \geq 3$"

(d) "S ist gerade" und "X_1 ist gerade"

(e) "S ist gerade", "X_1 ist gerade" und "$X_2 \geq 5$".

Versuche richtig zu argumentieren, schreibe die Ereignisse als Teilmengen von Ω.

Aufgabe 29. Bedingter Erwartungswert (B, 4 Punkte)
Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter p, d.h. $P[X = k] = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots\}$ (d.h. $X = N + 1$ mit N wie in Aufgabe 10)

(a) Berechne $E(X)$. *Hinweis:* Nutze das Lemma aus der Vorlesung

(b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $G = \{X \text{ ist gerade}\}$.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ berechne $P(X = k|G)$

(d) Berechne $E(X|G)$.

Aufgabe 30. Würfelparadoxon (C, 4 Punkte)
Zwei Würfel W_1 und W_2 seien wie folgt beschriftet:

$$W_1 : 6\,3\,3\,3\,3\,3,$$
$$W_2 : 5\,5\,5\,2\,2\,2.$$

Anton und Brigitte würfeln mit W_1 bzw. W_2. Wer die höhere Augenzahl erzielt, hat gewonnen.

(a) Zeigen Sie, dass Anton die besseren Gewinnchancen hat; wir schreiben dafür $W_1 > W_2$.

(b) Brigitte bemerkt dies und schlägt Anton vor: "Ich beschrifte jetzt einen dritten Würfel. Du darfst dir dann einen beliebigen Würfel aussuchen, ich wähle mir einen der beiden anderen." Kann Brigitte den dritten Würfel so beschriften, dass sie in jedem Fall die besseren Gewinnchancen hat (d.h. so dass $W_1 > W_2 > W_3 > W_1$, also die Relation '>' nicht *transitiv* ist)?