Blatt 6

Abgabe am 25. Oktober

Aufgabe 31. Totale Wahrscheinlichkeit (B, 4 Punkte)
Eine Mietwagenfirma verfüge über 300 Fahrzeuge eines bestimmten Types, die jährlich nach folgenden Regeln erneuert werden: Ein Wagen werde bereits nach einem Jahr erneuert, wenn er in dieser Zeit mehr als 20 000 km gefahren wurde, andernfalls wird er im darauffolgenden Jahr erneuert. Erfahrungsgemäss weisen 40% der Wagen nach ihrem ersten Jahr einen Kilometerstand von mehr als 20 000 km auf. Bestimme den Anteil der zu erneuernden Wagen nach k Jahren, falls zu Beginn des ersten Jahres 300 Neuwagen vorhanden sind. Gegen welchen Wert streben diese Anteile?

Aufgabe 32. (A, 5 Punkte)
Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y, welche je die Werte 0 oder 1 annehmen können. Die (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung von (X, Y) sei durch folgende Angaben bestimmt:

$$P(X = 0) = 1/2, \quad P(Y = 0) = 1/2, \quad P(X = 0, Y = 0) = p.$$

Bestimme

(a) die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$\{X = 1, Y = 0\}, \{X = 0, Y = 1\}, \{X = 1, Y = 1\}.$$

In welchem Bereich darf p liegen?

(b) die Verteilung von $X + Y$.

(c) $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.

Aufgabe 33. Varianz I (A, 2 Punkte)
Beim Roulette gibt es 18 schwarze Felder, 18 rote Felder und die Null. Man setzt jede Runde auf 'schwarz'. Rollt die Kugel in einer Runde auf 'schwarz', so erhaltet man den doppelten Einsatz, ansonsten verliert man den Einsatz. Berechne den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns wenn man

(a) in einer Runde 100 Euro setzt?

(b) in hundert Runden 1 Euro setzt?

Aufgabe 34. Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung (A, 2 Punkte)
Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter p, d.h. $P[X = k] = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots\}$.

(a) Zeige, dass

$$P[X > m + n | X > m] = P[X > n] \quad \text{für jedes } m, n \geq 1. \tag{1}$$

(b) (Bonusfrage: 4 Punkte, Kat. B–C) Umgekehrt, sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{1, 2, \dots\}$ die (1) erfüllt. Zeige, dass X geometrisch verteilt ist.

Aufgabe 35. Unabhängigkeit (B, 4 Punkte)

(a) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ unabhängige Ereignisse. Zeige, dass dann die Kollektion $\emptyset, A, B, \Omega$ auch unabhängig ist.

(b) Sei $(A_1, \ldots, A_n)$ eine unabhängige Kollektion von Ereignissen. Nehme an dass $A_i = A_j$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Zeige, dass $P(A_i) = P(A_j) \in \{0, 1\}$.

(c) (Satz aus der Vorlesung, Schwierigkeit C, 4 Bonuspunkte) Sei $A_1, \ldots, A_n$ eine unabhängige Kollektion von Ereignissen. Seien weiter $B_i = A_i$ oder $B_i = A_i^c$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass dann die Kollektion $B_1, \ldots, B_n$ auch unabhängig ist.

Aufgabe 36. Gemeinsame Verteilung (B, 4 Punkte)
Alice, Bob und Cecile würfeln jeder einen Würfel. Wer am wenigsten Punkte hat, zahlt 2 CHF an den, der am meisten Punkte hat. Im Fall, dass zwei die gleiche Augenzahl haben, werden die 2 CHF an die beide Gewinner (bzw. Verlierer) geteilt (Z.B. wenn Alice 6 hat und Bob und Cecile beide 3, dann zahlen Bob und Cecile je 1 CHF an Alice). Seien X_A, X_B, X_C die Zufallsvariablen die das Gewinn von Alice/Bob/Cecile nach diesem Spiel bezeichnen.

(a) Finde die Verteilung von X_A, d.h. gebe $P(X_A = k)$ für alle mögliche Werte von X_A.

(b) Bestimme die gemeinsame Verteilung von X_A und X_B.