Blatt 8

Abgabe am 8. November

Aufgabe 42. Stetigkeitseigenschaft der W-keit (B, 3 Punkte)
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass für beliebige Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, mit $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$,

$$P\Big(\bigcap_{i\geq 1} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

gilt. Zeige, dass wenn $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ für Ereignisse $B_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, gilt, dann

$$P\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

Hinweis: Nehme Komplemente.

Aufgabe 43. Eigenschaften der Verteilungsfunktion (B, 6 Punkte)
Sei X eine beliebige Zufallsvariable auf einem allgemeinen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und F_X ihre Verteilungsfunktion. Zeige den Satz aus der Vorlesung, d.h.

(a) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

(b) F_X ist nicht fallend, d.h. $x \leq y \implies F_X(x) \leq F_X(y)$.

(c) F_X ist rechtsstetig, d.h. $\lim_{i\to\infty} F_X(x_i) = F_X(x)$ für eine beliebige Folge $x_1, x_2, \dots$ mit $x_i > x$ und $\lim_{i\to\infty} x_i = x$.

Hinweis: Für (a) und (c) nutze die Aufgabe 42

Aufgabe 44. Verteilungsfunktionen (A, 6 Punkte)
Welche dieser Funktionen sind Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X. Begründe die Antwort.

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1/2, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x^2 & \text{falls } x \in [0,\frac{1}{2}), \\ 2x-1 & \text{falls } x \in [\frac{1}{2},1), \\ 1, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$ (d) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x^2 & \text{falls } x \in [0,\frac{1}{2}), \\ \frac{(x+1)}{2} & \text{falls } x \in [\frac{1}{2},1), \\ 1, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$

(e) Falls F eine Verteilungsfunktion ist, gebe $P(X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ und $P(X = \frac{1}{2})$ an.

Aufgabe 45. Dichtefunktion (A–B, 4 Punkte)
Bestimme die Konstante $c = c(\alpha)$, so dass f eine Dichtefunktion ist ($\alpha \geq 0$ ist ein Parameter).

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ cx^{-\alpha}, & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \text{ und } x > c, \\ 1 - 2\alpha x, & \text{falls } x \in [0,c]. \end{cases}$

Ist dies immer möglich?

Aufgabe 46. **σ-Algebren I** (A, 8 Punkte)

(a) Sei Ω eine nichtleere Menge und A eine Menge mit $\emptyset \neq A \subsetneq \Omega$. Finde die kleinste σ-Algebra auf Ω die A enthält.

(b) Gebe alle möglichen σ-Algebren auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$ an.

(c) Sei $\Omega = [0, \infty)$ und $\mathcal{F} = \{[a, b), 0 \leq a \leq b \leq \infty\}$. Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra?

(d) Sei $\Omega = [0, \infty)$ und $\mathcal{G} = \{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F}\}$. Ist $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra?

Aufgabe 47. **σ-Algebren II** (Bonusfrage C, 4 Punkte)
Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}$ eine beliebige Kollektion von σ-Algebren auf Ω (d.h. für jedes α in der Indexmenge I ist $\mathcal{A}_\alpha$ eine σ-Algebra auf Ω).

(a) Sei

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha = \{B \subset \Omega : B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{B}$ wieder eine σ-Algebra ist.

(b) (Satz aus der Vorlesung) Sei $\mathcal{E}$ eine beliebige Kollektion von Teilmengen von Ω und

$$\Sigma = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega \text{ und } \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}.$$

Zeige, dass $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \Sigma} \mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{E}$ enthält ist, d.h.:

(b1) $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$.

(b2) $\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra.

(b3) Es gibt keine σ-Algebra $\mathcal{F}$ die $\mathcal{E}$ enthält und $\mathcal{F} \subsetneq \sigma(\mathcal{E})$.

Hinweis: Nutze Teil (a).