Blatt 9

Abgabe am 15. November

Aufgabe 48. (A, 4 Punkte)

(a) Bei einer bestimmten Malariaschutzimpfung treten im Mittel in 0.5% aller Fälle Negativreaktionen auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 500 Impfungen mindestens eine Negativreaktion beobachtet wird. Wie gross ist die durchschnittliche Anzahl der Negativreaktionen?

(b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A bei vier unabhängigen Versuchen *mindestens einmal* eintritt, sei 0.5904. Dabei sei das Eintreten von A bei jedem Versuch gleichwahrscheinlich. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Ereignis A *mindestens zweimal* eintritt?

Aufgabe 49. Stetige Verteilungen (A, 4 Punkte)
Sei X eine auf dem Interval $[a, b]$ gleichverteilte Zufallsvariable.

(a) Wir wissen schon, dass $EX = \frac{a+b}{2}$. Zeige, dass $\operatorname{Var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$.

(b) Für $a = -1$ und $b = 2$ bestimme $P(X \in [1/3, 2/3])$, $P(|X| \geq 0.4)$, und $P(X^2 \in (0.6, 1.4))$.

Aufgabe 50. Stetige Verteilungen II (A, 3 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & x \in [0,1] \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$, wobei $a, b \geq 0$.

(a) Drücke b als Funktion von a aus. (b) Berechne EX. (c) Berechne $\operatorname{Var} X$.

Aufgabe 51. Cauchy-Verteilung (B, 2 Punkte)
Wenn eine Zufallsvariable X die Dichtefunktion $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, besitzt, dann heisst sie Cauchy-verteilt. Zeige, dass der Erwartungswert von X nicht definiert ist.

Aufgabe 52. Verteilung des Maximums (B, 6 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf dem gleichen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die alle die gleiche Verteilung haben, und sei F ihre gemeinsame Verteilungsfunktion, d.h. $F(x) = P(X_i \leq x)$.

(a) Sei $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ das Maximum dieser Zufallsvariablen. Zeige, dass die Verteilungsfunktion F_{M_n}

$$F_{M_n}(x) = F(x)^n$$

erfüllt.

Hinweis: Nutze, dass $M_n \leq x$ genau dann, wenn $X_i \leq x$ für alle $i \leq n$.

(b) Nehme an, dass die Zufallsvariablen X_i stetig sind, mit einer gemeinsamen (stückweise stetigen) Dichte f. Finde die Dichtefunktion f_{M_N} von M_N.

(c) Sei jetzt $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Finde F_{m_N} und f_{m_N}.

Aufgabe 53. Minimum von exponentialverteilten ZVn (B, 4 Punkte)
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, und sei X_i exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_i > 0$, d.h. $P(X_i \geq x) = e^{-\lambda_i x}$ für $x \geq 0$.

(a) Finde die Verteilungsfunktion und die Dichte von X_i.

(b) Zeige, dass $\min(X_1, \dots, X_n)$ exponentialverteilt ist, mit Parameter $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Aufgabe 54. Summenstabilität der Binomial/Poissonverteilung (B, 4 Punkte)

(a) Seien X, Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, $X \sim \mathsf{Bin}(n,p)$ und $Y \sim \mathsf{Bin}(m,p)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Zeige, dass $X + Y \sim \mathsf{Bin}(n+m,p)$.

Hinweis: Nutze die Repräsentation $X+Y = X_1 + \cdots + X_{m+n}$, wobei X_i unabhängige Bernoulli Zufallsvariablen sind, oder die Identität $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$.

(b) Seien X, Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, $X \sim \mathsf{Pois}(\lambda)$ und $Y \sim \mathsf{Pois}(\mu)$ mit $\lambda, \mu > 0$. Zeige, dass $X + Y \sim \mathsf{Pois}(\lambda + \mu)$.