Blatt 10

Abgabe am 22. November

Aufgabe 55. Cauchy-Verteilung (A, 3 Punkte)
Sei $C > 0, a > 0, m \in \mathbb{R}$ sowie $f(x) = \frac{C}{(1+a(x-m)^2)}$. Bestimme die Konstante $C = C(a,m)$ derart, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist. Bestimmen Sie ausserdem die Verteilungsfunktion von X. *Hinweis:* Es gilt $(\arctan(x))' = \frac{1}{(1+x^2)}$.

Aufgabe 56. Normalverteilung (A, 6 Punkte)
Die Länge einer Schraube sei bei einer bestimmten Maschineneinstellung eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $m = 75\,\mathrm{mm}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0.5\,\mathrm{mm}$. Eine Schraube mit einer Länge kleiner als $74\,\mathrm{mm}$ ist Ausschuss. Ist die Länge grösser als $75.5\,\mathrm{mm}$, dann muss die Schraube nachgearbeitet werden.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube Ausschuss ist.

(b) Es werden 150 Schrauben produziert. Wie viele Schrauben lassen sich im Mittel sofort verwenden?

(c) Um welchen Wert wäre die Maschineneinstellung (d.h. der eingestellte Mittelwert m) zu korrigieren, damit nicht mehr als 1% der Schrauben Ausschuss sind?

Hinweis: Benutze entweder die Tabelle der Normalverteilung von z.B. Wikipedia, oder eine geeignete Software.

Aufgabe 57. Gemeinsame Verteilung I (A, 10 Punkte)
Es seien X und Y Zufallsvariablen mit der folgenden gemeinsamen Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f_{X,Y}(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Bestimme die Randverteilungen von X und Y.

(c) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P[X = \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{2}]$, $P[X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2}]$.

(d) Sind X und Y unabhängig? Begründe die Antwort.

(e) (Level B) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass $P(X \ge Y)$. *Hinweis:* Benutze dazu die folgende Verallgemeinerung der Formel aus der Vorlesung: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, mit $f \le g$. Dann

$$P(f(X) \le Y \le g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{f(x)}^{g(x)} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Aufgabe 58. Gemeinsame Verteilung und Unabhängigkeit (B–C, 4 Punkte)
Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit respektiven Dichten f_X, f_Y und der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$.

(a) Zeige, dass wenn
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \tag{2}$$
dann sind die Zufallsvariablen X, Y unabhängig.

(b) Zeige, die umgekehrte Aussage: Wenn X und Y unabhängig sind mit Dichten f_X und f_Y, dann besitzen sie eine gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ die (2) erfüllt.

Hinweis: Schreibe $P(X \in [a,b], Y \in [c,d])$ mit Hilfe von f_X und f_Y und nutze mehrmals, dass $c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} c f(x) \mathrm{d}x$ für eine beliebige von x unabhängige Konstante c.

Aufgabe 59. Summe und Produkt (B, 4 Punkte)
Es sei X, Y gleichverteilt auf $(-1, 1)$ und unabhängig. Bestimme die Dichten von (a, 2 Punkte) $X + Y$ und (b, 2 Bonuspunkte) XY. *Hinweis:* Bestimme die gemeinsame Dichte von X, Y mit Hilfe der Aufgabe 58. Dann berechne die Verteilungsfunktionen von $X + Y$ und XY mit Hilfe von (1).