Blatt 11

Abgabe am 29. November

Aufgabe 60. Deskriptive Statistik (A, 6 Punkte)
Bei 60 Tannen eines 40-jährigen Baumbestandes wurde der Durchmesser des Stammes auf Brusthöhe gemessen (Angaben in cm). Die Daten können auf der Webseite zur Vorlesung heruntergeladen werden.

(a) Gebe unter Verwendung der Klasseneinteilung 6.5–8.5, 8.5–10.5, …, 18.5–20.5 die vollständige Häufigkeitstabelle an und stelle die Häufigkeitsverteilung mithilfe eines Histogramms grafisch dar.

(b) Was ist der Modalwert D, der Mittelwert $\bar{x}$, der Median $\widetilde{x}$ und die empirische Varianz dieser Stichprobe?

(c) Zeichne einen Boxplot der Stichprobe. Dabei soll die Länge der Antennen nicht das 1.5-fache der IQR überschreiten.

Zum Lösen dieser Aufgabe darf Software nach eigener Wahl (R/Rstudio, Excel, Open-Office, Python, Java, …) benutzt werden. Die erzeugten Diagramme sollen ausgedruckt abgegeben werden.

Aufgabe 61. Satz aus der Vorlesung (A, 3 Punkte)
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit Verteilung P_θ, wobei θ ein (unbekannter) Parameter ist. Für einen beliebigen Schätzer $\hat{\theta} = T(X_1, \ldots, X_n)$ von θ (für den die unten stehenden Kennzahlen wohldefiniert sind), zeige dass

$$\mathrm{MSE}_{\hat{\theta}}(\theta) = (b_{\hat{\theta}}(\theta))^2 + (\sigma_{\hat{\theta}}(\theta))^2.$$

Aufgabe 62. Schätzer I (A, 6 Punkte)
Die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_5$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Mittelwert m und Varianz σ^2. Betrachte folgende Schätzer für den Mittelwert:

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \frac{1}{5}\big(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5\big)\\
T_2 &:= \frac{1}{3}\big(X_1 + X_2 + X_3\big)\\
T_3 &:= \frac{1}{8}\big(X_1 + X_2 + X_3 + X_4\big) + \frac{1}{2}X_5\\
T_4 &:= X_1 + X_2\\
T_5 &:= X_1
\end{aligned}$$

(a) Welche Schätzer sind erwartungstreu?

(b) Welcher Schätzer hat den kleinsten MSE?

Aufgabe 63. Schätzer II (A, 4 Punkte)
Die Stichprobenvariablen X_j seien unabhängig, Bernoulliverteilt mit unbekanntem Parameter p.

(a) Zeige, dass der Schätzer $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ für p erwartungstreu und konsistent im quadratischen Mittel (d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}_{\overline{X}_n}(p) = 0$) ist. *Hinweis:* Nutze für die zweite Aussage einen Satz aus der Vorlesung.

(b) Um die Varianz $p(1-p)$ zu schätzen betrachten wir den Schätzer $T := \overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$. Ist T erwartungstreu? Wenn nein, kann man das beheben? Falls ja, wie?

Aufgabe 64. Schätzer III (B, 6 Punkte)
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, auf dem Intervall $[0, a]$ uniform verteilte Zufallsvariablen. Der Parameter a sei unbekannt und soll geschätzt werden. Wir betrachten drei verschiedene Schätzer:

$$Y_n := \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n X_j, \qquad M_n := \max_{1\le j\le n} X_j, \qquad M_n' := \frac{n+1}{n}\max_{1\le j\le n} X_j.$$

(a) Bestimme den systematischen Schätzfehler von Y_n, M_n und M_n'. Welche Schätzer sind erwartungstreu? *Hinweis:* Um M_n zu betrachten, finde zuerst die Dichte $f_{M_n}(x)$; nutze dazu die Aufgabe 52.

(b) Zeige dass die Schätzer aus dem letzten Beispiel konsistent im quadratischen Mittel sind. Welcher der beiden erwartungstreuen Schätzer konvergiert schneller?

Aufgabe 65. (A, 0 Punkte)
Dies ist eine Aufgabe zum Wiederholen, sie musst nicht abgegeben werden. Vergewissern Sie sich aber, dass Sie sie lösen können. Die Dichte einer Zufallsvariable X sei

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ c & 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{x^{1+\alpha}} & x \ge 1, \end{cases}$$

wobei $\alpha \ge 1$.

(a) Welche Werte darf/muss c annehmen, damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist?

(b) Begründe, warum $\alpha \ge 1$ gelten muss.

(c) Bestimme die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

(d) Bestimme $E[X]$. Für welche α ist $E[X]$ endlich?

(e) Sei $Y = e^X$. Bestimme die Dichte $f_Y(y)$. Was kann man über den Erwartungswert von Y sagen? *Hinweis:* Bestimme zuerst die Verteilungsfunktion von Y.