Blatt 12

Abgabe am 6. Dezember

Aufgabe 66. ML Schätzer I (A, 4 Punkte)
Die *Pareto-Verteilung* $X \sim \mathsf{Par}(k, x_0)$ ist gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^k, & x > x_0, \\ 0, & x \leq x_0. \end{cases}$$

Finde den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter k (bei bekanntem x_0) der Pareto-Verteilung.

Aufgabe 67. ML Schätzer II (B, 6 Punkte)
Ein Gen tritt in einer Population in zwei Ausprägungen aus: A mit relativer Häufigkeit p und a mit relativer Häufigkeit $1-p$. Bei unabhängiger Paarung treten die Genotypen AA, Aa und aa jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\pi_1 = p^2$, $\pi_2 = 2p(1-p)$ und $\pi_3 = (1-p)^2$ auf.

Bei einer Studie wird eine Stichprobe vom Umfang n aus der Population gezogen. Seien X_1, X_2, X_3 die Häufigkeiten der Genotypen AA, Aa und aa in der Stichprobe.

(a) Finde
$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3)$$
für alle möglichen Werte von x_1, x_2, x_3.

In der Studie mit $n = 250$ Individuen tritt AA bei 25 Individuen auf, Aa bei 100 Individuen und aa bei 125 Individuen.

(b) Berechne mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode einen Schätzer $\hat{p}$ für p. Was ist im obigen Fall der Wert von $\hat{p}$?

(c) Berechne mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode einen Schätzer $\hat{\pi}_1$ für π_1. Was ist im obigen Fall der Wert von $\hat{\pi}_1$?

Aufgabe 68. ML Schätzer III (B, 4 Punkte)
Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{Unif}(0, a)$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter a.

Hinweis. Beachte, dass die Dichte der Gleichverteilung nicht überall differenzierbar ist. Es lohnt sich die Likelihood-Funktion aufzuzeichnen.

Aufgabe 69. Vertrauensintervalle (A, 4 Punkte)

(a) Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit wurde eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ mit Mittelwert $\overline{x} = 98.9$ gezogen. Die (bekannte) Standardabweichung sei $\sigma = 2$. Bestimme das Vertrauensintervall für den Erwartungswert zum Niveau $\alpha = 0.05$.

(b) Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit wurde eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ mit Mittelwert $\overline{x}_n = 98.9$ und Stichproben-Standardabweichung $s_n = 2.183$ gezogen. Bestimme das zweiseitige Vertrauensintervall für den Erwartungswert zum Niveau 0.05.

Die Quantile der Standardnormalverteilung sind

α	0.750	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
z_α	0.674490	0.841621	1.281550	1.644850	1.959960	2.326350	2.575830

Die Quantile der t-Verteilung sind in den Vorlesungsnotizen im Adam.

Aufgabe 70. Summenstabilität der Gamma-Verteilung (B–C, 4 Punkte)
Für $r, s > 0$ seien X und Y unabhängig, $X \sim \mathsf{Gamma}(r, \alpha)$ und $Y \sim \mathsf{Gamma}(s, \alpha)$, d.h. die Dichte von X ist

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei $\Gamma(r) := \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} \mathrm{d}x$ die Gamma-Funktion ist.

(a) Zeige, dass $S = X + Y$ Gamma$(r + s, \alpha)$-verteilt ist.

Hinweis: Wir wissen, dass die Dichte von S mit Hilfe der Faltung ausgerechnet werden kann, $f_S(t) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_Y(t - x) \mathrm{d}x$. Um f_S zu bestimmen, braucht man im Prinzip das Integral nicht auszurechnen, man muss nur seine Abhängigkeit von t bestimmen (die multiplikativen Konstanten stimmen automatisch, weil f_S eine Dichte sein muss). Versuche es mit einer geeigneten Substitution.

(b) Seien X_i, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig exponentialverteilt mit Parameter α. Zeige, dass $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ $\mathsf{Gamma}(n, \alpha)$-verteilt ist. *Hinweis:* Benutze (a).

Aufgabe 71. χ^2-Verteilung (B, 4 Punkte)
Die χ^2-Verteilung mit Parameter n ist ein anderer Name für die $\mathsf{Gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$-Verteilung. Seien $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unabhängig.

(a) Zeige, dass X_1^2 $\chi^2(1)$-verteilt ist. *Hinweis:* Berechne zuerst die Verteilungsfunktion von X_1^2.

(b) Benutze Aufgabe 70 um die Verteilung von $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ zu bestimmen.