# Blatt 13

*Abgabe am 13. Dezember*

Ein Blatt zum wiederholen. Alle Punkte sind Bonuspunkte.

**Aufgabe 72. Vertrauensintervalle I** (A, 3 Punkte)
Ein Hersteller untersucht die Ausfallwahrscheinlichkeit von Bauteilen unter erhöhter Belastung. Ein Test mit 50 Bauteilen ergab 6 Ausfälle. Bestimme ein approximatives Vertrauensintervall auf dem Niveau $\alpha = 5\%$ für die Ausfallwahrscheinlichkeit.

**Aufgabe 73. Vertrauensintervalle II** (A, 5 Punkte)
Eine Firma stellt Präzisionswiderstände her. Der Erwartungswert darf um maximal 0.1% vom Sollwert 100 Ohm abweichen. Die Standardabweichung darf 0.2 nicht überschreiten. Zur Qualitätssicherung wird aus dem laufenden Produktionsprozess eine Stichprobe vom Umfang $n = 50$ mit Mittelwert $\overline{x}_{50} = 100.014$ und Standardabweichung $s_{50} = 0.11$ entnommen. Sind die Vorgaben auf einem Konfidenzniveau von 0.95 ($\alpha = 0.05$) erfüllt (unter der Annahme einer normalverteilten Grundgesamtheit)?

**Aufgabe 74.** (A, 4 Punkte)
Die Produktion einer Abteilung werde von zwei Kontrolleuren sortiert. Dabei sei für den ersten Kontrolleur, der 40% der Produkte sortiert, die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Fehlentscheidung zu treffen, gleich 0.04 und für den zweiten 0.06.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Produkt richtig einsortiert?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein falsch einsortiertes Produkt vom ersten Kontrolleur sortiert?

**Aufgabe 75.** (A, 5 Punkte)
Gegeben sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} cx(2-x), & \text{für } x \in [0,2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass $f$ eine Dichtefunktion einer Zufallsvariable $X$ ist.

(b) Berechne $EX$, $\operatorname{Var} X$.

(c) Finde die Dichte $f_Y$ der Zufallsvariable $Y = X^2$. *Hinweis:* Bestimme zuerst $F_Y$.

**Aufgabe 76.** (B, 10 Punkte)
Seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen uniform verteilt auf dem Dreieck $K_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, L] \text{ und } 0 \le y \le x/L\}$, wobei $L$ ein positiver Parameter ist, d.h. die gemeinsame Dichtefunktion ist

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c_L, & \text{für } (x,y) \in K_L, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Konstante $c_L$.

(b) Berechne die Randdichten von $X$ und $Y$.

(c) Sei die Ereignisse $A = \{X \leq L/3\}$ und $B = \{Y \leq X/(2L)\}$. Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P[A]$ und $P[B]$. Sind die Ereignisse $A$ und $B$ unabhängig?

(d) Wir nehmen nun an, dass der Parameter $L$ *unbekannt* ist und geschätzt werden muss anhand von Daten. Für einen gegebenen Datensatz $x_1, \ldots, x_k$ der Verteilung von $X$, bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für $L$.

**Aufgabe 77.** (A, 5 Punkte)
Antworte 'richtig' oder 'falsch' und *begründe* die Antwort. (1/2 Punkt für die richtige Antwort, 1 Punkt wenn auch die Begründung stimmt.)

(a) Die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (x+1)/4, & x \in [0,1), \\ 1/2, & x \in [1,2), \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable $X$, die $P(X = 0) = 1/4$ und $P(X = 1) = 0$ erfüllt.

(b) Die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ zweier Zufallsvariablen $X, Y$ erfüllt $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq 0$.

(c) Sei $X$ eine Zufallsvariable mit $E(X) = 10$ und $\mathrm{Var}(X) = 5$. Dann $P[X < 5] \leq 1/5$.

(d) Die gemeinsame Dichte von zwei Zufallsvariablen $X, Y$ ist

$$f_{X,Y}(x, y) = Ce^{-(x-5)^2-(y-6)^4}, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

und daher sind $X$, $Y$ unabhängig.

(e) Sei $X_n$ binomialverteilt mit Parametern $n$ und $p_n$, wobei $\lim_{n\to\infty} np_n = 1$. Dann konvergiert die Verteilung von $X_n$ zur Normalverteilung $\mathcal{N}(1, 1)$.