Blatt 4

Abgabe am 20. März 2020 um 13 Uhr

Ab dieser Serie sind die gelösten Aufgaben per Email als PDF abzugeben.

Aufgabe 16. I.i.d. Bernoulli Zufallsvariablen (A, 3 Punkte)
Im Beispiel 5.5 haben wir eine Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ von Bernoulli($\frac{1}{2}$)-Zufallsvariablen konstruiert und haben gezeigt, dass diese Zufallsvariablen paarweise unabhängig sind (d.h. X_i ist unabhängig von X_j falls $i \neq j$). Wir haben, ohne Beweis, behauptet, dass die Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ eine i.i.d. Folge ist. Beweise diese Behauptung.

Aufgabe 17. Unabhängigkeit (B, 6 Punkte)
(Einfachere Formulierung der Übung 5.11 aus dem Skript) Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_X und F_Y und der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(x, y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$.

(a) Zeige, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

(b) Nimm jetzt an, dass X, Y Dichten f_X, f_Y und die gemeinsame Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitzen. Zeige, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Aufgabe 18. Konvergenz Gegenbeispiele, cf. Satz 6.4 (A-B, 4 Punkte)
Finde eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von Zufallsvariablen die

(a) in Wahrscheinlichkeit konvergiert, aber nicht in L^p.

(b) in Wahrscheinlichkeit konvergiert, aber nicht f.s.

(c) in L^p konvergiert, aber nicht f.s.

(d) f.s. konvergiert, aber nicht in L^p.

Aufgabe 19. Übernormalisierte Summen (A, 4 Punkte)
Seien X_i, $i \geq 1$, i.i.d. Zufallsvariablen und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Nehme an, dass $EX_i = m \in (-\infty, \infty)$ und $\gamma > 1$. Zeige, dass $n^{-\gamma}S_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in Wahrscheinlichkeit und in L^1.

(b) Nehme jetzt an, dass $m = 0$ und $EX_i^2 = c < \infty$. Für $\gamma > 1/2$ zeige dass, $n^{-\gamma}S_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in L^2 und in Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 20. Konstruktion der i.i.d. Folgen (A, 0 Punkte)
Lies das Beispiel 5.10 im Skript, wo ein W-Raum mit einer Folge von i.i.d. Zufallsvariablen konstruiert wird. (In dem Beispiel nehmen wir die Existenz der unendlich-dimensionalen Produkträume an, die wir nicht bewiesen haben).

Aufgabe 21. Konstruktion der i.i.d. Folgen (Bonus) (C, 5 Punkte)
Diese Übung zeigt eine Konstruktion einer i.i.d. Folge mit einer beliebigen Verteilungsfunktion, die keine Ergebnisse der abstrakten Masstheorie braucht und nur die Existenz des Lebesgue-Masses annimmt. Der Startpunkt ist die i.i.d. Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ von Bernoulli($\frac{1}{2}$)-Zufallsvariablen von Aufgabe 16 konstruiert auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}) = ([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda|_{[0,1)})$.

(a) Finde eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

(b) Sei

$$U_i = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} X_{\varphi(i,j)}, \qquad i \geq 1.$$

Zeige, dass U_i eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist und dass sie uniform($[0, 1]$) verteilt ist.

Hinweis: Es genügt nur die Wahrscheinlichkeiten $P(U_i \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}))$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j < 2^{-k}$ zu betrachten. Warum?

(c) Zeige, dass $(U_i)_{i \geq 1}$ eine i.i.d. Folge ist. *Hinweis:* Nutze Korollar 4.12

(d) Sei F eine beliebige Verteilungsfunktion (wie in Behauptung 2.8). Nutze den Beweis vom Satz 2.10, um auf Ω eine i.i.d. Folge $(Y_i)_{i \geq 1}$ zu konstruieren, so dass Y_i die Verteilungsfunktion F hat, d.h. $P(Y_i \leq x) = F(x)$.