Blatt 6

Abgabe per Email am 3. April 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 27. Satz von Glivenko-Cantelli (B, 4 Punkte)
Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine i.i.d. Folge. Nehme an, dass X_1 eine stetige Verteilungsfunktion F besitzt. Betrachte, die *empirische Verteilung* der ersten n Zufallsvariablen X_i, definiert durch

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i},$$

deren Verteilungsfunktion

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}$$

ist. (Beachte, dass μ_n und F_n zufällig sind.) Zeige, dass

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0 \text{ f.s. wenn } n \to \infty.$$

Hinweis. Zeige zuerst, mit Hilfe des Gesetzes der grossen Zahlen, dass F_n punktweise konvergiert. Versuche dann zu argumentieren, dass die punktweise Konvergenz von F_n die gleichmässige Konvergenz impliziert.

Bemerkung. Der Satz von Glivenko-Cantelli gilt auch ohne der Annahme, dass F stetig ist.

Aufgabe 28. Konvergenzarten (A, 4 Punkte)
Seien (Y_n) Zufallsvariablen die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind.

(a) Nehme an, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$, wobei c eine Konstante ist. Zeige, dass auch $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$.

(b) Zeige, dass die Aussage von (a) nicht gilt, wenn man c durch eine nicht-triviale Zufallsvariable Y (auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum) ersetzt.

Aufgabe 29. "Converging together" Lemma (B, 4 Punkte)
Seien X_n und Y_n zwei Folgen von Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Nehme an, dass $X_n \overset{d}{\to} X$ und $Y_n \overset{d}{\to} c$, wobei c eine Konstante ist. Zeige, dass $X_n + Y_n \overset{d}{\to} X + c$.

Hinweis. Benutze, die Aussage der Vorlesung, dass $Z_n \overset{d}{\to} Z$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} E[h(Z_n)] = E[h(Z)] \quad \text{für alle } h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ beschränkt und \textit{gleichmässig} stetig.}$$

Bemerkung. Eine wichtige Konsequenz dieser Aussage ist: Wenn $X_n \overset{d}{\to} X$ und $Z_n - X_n \overset{d}{\to} 0$, dann $Z_n \overset{d}{\to} X$.

(b) Finde zwei Folgen X_n, Y_n von Zufallsvariablen, so dass $X_n \overset{d}{\to} X$, $Y_n \overset{d}{\to} Y$, aber $X_n + Y_n \overset{d}{\not\to} X + Y$.

Aufgabe 30. Konvergenz von stochastischen Reihen (B, 4 Punkte)
Sei $\psi(x) = x^2$ für $|x| \leq 1$ und $\psi(x) = |x|$ für $|x| \geq 1$ und seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $EX_n = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} E\psi(X_n) < \infty$. Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher konvergiert.

Aufgabe 31. Fatou's Lemma für Konvergenz in Verteilung (A, 3 Punkte)
(Übung 10.10 im Skript). Sei $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Zeige, dass wenn $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, dann $\liminf_{n\to\infty} E(g(X_n)) \geq E(g(X))$.

Aufgabe 32. Geburtstagsproblem (A–B, 4 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig uniform verteilt auf $\{1, \ldots, N\}$ und $T_N = \min\{n : X_n = X_m \text{ für ein } m < n\}$.

(a) Zeige, dass

$$P(T_N > n) = \prod_{m=1}^{n} \Big(1 - \frac{m-1}{N}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Für $N = 365$ ist das die Wahrscheinlichkeit, dass in der Gruppe von n Personen alle unterschiedliche Geburtstage haben.

(b) Zeige, dass $T_N/N^{1/2}$ in Verteilung gegen T konvergiert, wobei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x^2/2})\mathbf{1}_{x\geq 0}$ ist.