Blatt 8

Abgabe per Email am 17. April 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 37. Change of measure (A, 4 Punkte)
Sei X eine nicht negative Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Zeige, dass die Abbildung $\bar{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\bar{P}(A) := \int_A X(\omega)\, P(\mathrm{d}\omega) = E(X; A), \tag{1}$$

ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(b) Zeige, dass $\bar{P}$ genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmass ist, wenn $EX = 1$.

(c) (Level A–) Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) = 0$. Berechne $\bar{P}(A)$.

Bemerkung. Die Antwort auf die Frage (c) sagt, dass $\bar{P}$ *absolut stetig bezüglich* P ist. Wir werden die nächste Woche in der Vorlesung eine umgekehrte Aussage brauchen: Für jedes (Wahrscheinlichkeits-)Mass auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, das bezüglich P absolut stetig ist, gibt es eine Zufallsvariable X so dass (1) war ist. Diese Aussage heisst Satz von Radon-Nikodým. Lese diesen Satz in einer Quelle nach eigener Wahl nach.

Aufgabe 38. Grosse Abweichungen der Binomialverteilung (A, 4 Punkte)
Seien X_i, $i \geq 1$, Bernoulli verteilt mit Parameter p, d.h. $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p$.

(a) Berechne die Laplace Transformierte ψ von X_1.

(b) Berechne ihre Legendre Transformation I.

(c) Sei Y binomialverteilt mit Parametern n, p. Schätze für $u > p$ und n gross die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq un)$ ab.

Aufgabe 39. Beweise aus der Vorlesung (B, 4 Punkte)
Zeige die folgenden Aussagen der Lemmata 13.4 und 13.5 des Skripts.

(a) Die Laplace Transformierte ψ einer Zufallsvariable X ist konvex.

(b) Die kumulantenerzeugende Funktion $\kappa = \log \psi$ ist konvex. *Hinweis:* Nutze die Ungleichung von Hölder.

(c) (Level C, Bonus 3) Wenn $\kappa(t) < \infty$ für alle $t \geq 0$, dann $\lim_{t\to\infty} \kappa'(t) = \operatorname{ess\,sup} X$.

Aufgabe 40. Stabile Verteilungen (*, 8 Punkte)
Seien X_i, $i \geq 1$, i.i.d. mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c|x|^{-\alpha-1}, & \text{wenn } |x| \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ ein Parameter ist. Setze $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) (Level A) Bestimme die Konstante c.

(b) (Level A) Zeige, dass $EX_1 < \infty$ genau dann, wenn $\alpha > 1$, und $E(X_1^2) < \infty$ genau dann, wenn $\alpha > 2$.

(c) (Level A) Was kannst du über das Verhalten von S_n sagen, wenn $\alpha > 2$, oder wenn $\alpha \in (1, 2)$? Benutze die Sätze aus der Vorlesung.

(d) (Level B+) Wir betrachten jetzt den Fall $\alpha < 2$. Zeige, dass für die charakteristische Funktion ϕ von X_1 folgendes gilt:

$$\phi(t) = 1 - c'|t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \qquad \text{wenn } t \to 0$$

(d.h. $\lim_{t\to 0} \frac{1-\phi(t)}{|t|^\alpha} = c' \in (0, \infty)$).

Hinweis. Schreibe $1 - \phi(t)$ als $2\int_1^\infty (1 - \cos(tx)) f(x)\, dx$ und nutze die Substitution $tx = y$. Argumentiere, warum der Grenzwert existiert.

(e) (Level B) Benutze (d), um zu zeigen, dass $S_n/n^{1/\alpha}$ in Verteilung konvergiert. Bestimme die charakteristische Funktion des Grenzwertes. *Hinweis.* Benutze den Satz von Lévy.

(f) (Level B) Seien jetzt X, Y unabhängige Zufallsvariablen verteilt wie den Grenzwert im (e). Zeige, dass es eine Konstante c gibt, so dass $c(X + Y)$ die gleiche Verteilung wie X hat.

Bemerkung. Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_distribution oder https://de.wikipedia.org/wiki/Alpha-stabile_Verteilungen